HNSJ
Humanitarian & Natural Sciences Journal
ISSN: (e) 2709-0833
www.hnjournal.net
مجلة العلوم الإنسانية والطبيعية
مجلة علمية محكمة
معامل التأثير العربي للعام 2020م = 0.44

عنوان البحث

تعريف ضرب كرونكر وضرب هادامار على حلقة المصفوفات

احلام محمد الصويعي[1]

[1] قسم الرياضيات– كلية الأصابعة– جامعة غريان– ليبيا

بريد الكتروني: ahlamshoa12@gmail.com

تاريخ النشر: 2021/05/01م تاريخ القبول: 2021/04/06م

المستخلص

حلقة المصفوفات التي من نوع $n \times n$ مع الجمع والضرب المعرفة علي المصفوفات هي مجموعة مألوفة, وهي نموذج لأنواع من النظم الجبرية الغنية بالخواص .في هذه الورقة درسنا حلقة مصفوفات مع ضرب كرونكر مرة وضرب هادامار مرة اخري, ووجدنا ان حلقة المصفوفات المعرف عليها ضرب كرونكر حلقة ليست تبديلية ,ولا تحتوي محايد, وبذلك لا تكون منطقة صحيحة ولا تكون حقل, وعناصرها لا تكون قاسمة للصفر ولا عديمة القوي ولا جامدة . وقمنا بدراسة ضرب هادامار علي حلقة المصفوفات وهي تكون تبديلية وذات محايد, وبذلك تكون منطقة صحيحة وعدم احتوائها عل عناصر قاسمة للصفر يجعلها تكون حقل ,بينما لا تحتوي علي عناصر جامدة الا علي المحايد, ولا تكون عناصرها عديمة القوي .و استنتجنا التشابه والاختلاف بين الحلقتان.

الكلمات المفتاحية: حلقة المصفوفات- المنطقة الصحيحة - ضرب كرونكر- ضرب هادامار.

RESEARCH ARTICLE

IDENTIFICATION OF KONEKER PRODUCT AND HADAMARD PRODUCT ON MATRICES RING

Ahlam Mohammed Alsoiei [1]

[1] Department of Mathematics - College of Al-Asaba - University of Gharyan - Libya
Email: ahlamshoa12@gmail.com

Published at 01/05/2021 **Accepted at 06/04/2021**

Abstract

Matrices ring of n x n type of addition and multiplication identified on matrices is a known group, it is a model of a rich of specialty algebra systems. In this piece of research we have studied matrices ring once with koneker product and other time with Hadamard product.We found that the identified matrices ring with koneker product is not commutative and does not contain identity so it cannot be a integral domain and cannot be a field, its components can not be a zero deviser or nilpotent nor idempotent. We have studied Hadamard product,on matrices ring which is commutative with identity , so it is a integral domain , by not containing of a zero deviso makes it a field while does not contain a idempotent elements except on identity. Its elements cannot be nilpotent so we have concluded the similarity and differences between the two rings.

Key Words: Matrices ring, Integral domain, koneker product, Hadamard product.

1 المقدمة:

ظهر مفهوم الحلقة, عند دراسة الاعداد الصحيحة وكثيرات الحدود, واول من ادخل هذا المفهوم, الرياضي الالماني هليبرات , كما ظهر العديد من المفاهيم المصفوفية الحديثة خلال العقديين من القرن العشرين ومنها ضرب كرونكر.

كما اكتشف العالم الفرنسي جاك هادامار ضرب جديد للمصفوفات سمية بضرب هادامار علي شرف هذا العالم.

استخدم Grahama (1981) ,ضرب كرونكر للمصفوفات في كتابه الذي يتطرق فيه الي حسبان المصفوفة مع التطبيقات.

استخدم Tollis (1987) , عملية ضرب هادامار في دراسة للمصفوفات المتماثلة.

استخدم Magnus (1988),المصفوفات و عملية ضرب كرونكر في مناقشة العديد من المفاهيم.

استخدم Ando (1995) ,عملية ضرب هادامار في دراسة القيم الذاتية للمصفوفة الهرميتية.

بين Sydsaeter , Strom and Berik (1999) , في كتابهم ان دراسة عملية ضرب كرونكر للمصفوفات تتطلب معرفة واسعة المدي للصيغ الرياضية والاحصائية.

تطرق Abadir and Magnus (2002) ,في بحثهما الي بيان اختلاف الرموز الرياضية التي استخدمت في المصطلحات مثل ضرب كرونكر للمصفوفات.

استخدم Mehsin (2016) ,في بحثه ضرب كرونكر ودالة كرونكر لدراسة خاصية التبديل علي مصفوفة هانكل.

استخدم Hiai and Lin (2017) ,في بحثهما ضرب كرونكر وضرب هادامار لدراسة القيم الذاتية للمصفوفات.

نشير ان الدراسة الحالية تتفق مع الدراسات السابقة في موضوعها الرئيس دراسة ضرب كرونكر وضرب هادامار علي مصفوفات, الا ان الهدف الاساسي من هذا الدراسة تعريف حلقة مصفوفيه بعملية ثنائية جديدة (ضرب كرونكر− ضرب هادامار) وهو ما لم يتم تناوله في أي دراسة سابقة .ففي الادب الرياضي انواع عديدة من الحلقات تختلف باختلاف العمليات الثنائية المعرفة عليها, ويكون لكل منها خواص ومبرهنات معينة. حيث تم في القسم 2 تعريف ضرب كرونكر $\otimes$وضرب هادامار $\odot$.في القسم3 تعاريف حلقة المصفوفات علي ضرب (كرونكر −هادامار) ,ومبرهنات علي هذه الحلقة. في القسم 4 تم مناقشة النتائج في القسم 3 وذكر بعض الملاحظات .في القسم 5عرض الاستنتاجات.

2 التعاريف

2−1 **تعريف حلقة مصفوفات** (رمضان وعلي,2000 ,ص183):

لتكن $(R,+,.)$ حلقة فان $(M_n(R),+,.)$ حلقة بالنسبة لعمليتي جمع وضرب المصفوفات.

2−2 **تعريف ضرب كرونكر** (رمضان ومحمد ,2006 ,ص401):

لتكن A و B مصفوفتين من النوع $n_1 \times m_1$ و $n_2 \times m_2$ علي التوالي , فان ضرب كرونكر $\otimes$ للمصفوفتين يعرف كما يلي :

$C = A \otimes B = [a_{ij}B]$ لكل $i, j = 1,2, \dots, n$.

2-3 **تعريف ضرب هادامار**(Styan , 1973,ص 217):

لتكن A و B مصفوفتين من النوع $m \times n$, فان ضرب هادامار $\odot$ للمصفوفتين A, B يعطي مصفوفة من نفس النوع و يعرف كما يلي:

$[A \odot B]_{ij} = [A]_{ij}[B]_{ij}$ لكل $1 \le i \le m, 1 \le j \le n$.

3 النتائج

بالاستعانة بالتعريفات السابقة نشتق منهم حلقتين جديدتين $(M_n(R), +, \otimes)$ هي حلقة مصفوفات من النوع $n \times n$معرف عليها ضرب كرونكر , $(M_{mn}(R), +, \odot)$ هي حلقة مصفوفات من النوع $m \times n$ معرف عليها ضرب هادامار.

تمهيدية 1 . اذا كانت R مجموعة الاعداد الحقيقية فان $(M_n(R), +, \otimes)$ حلقة بالنسبة لعملية جمع المصفوفات وضرب كرونكر لأنها تحقق شروط الحلقة:

1- $(M_n(R), +)$ زمرة تبديلية.

2- $\otimes$ عملية ثنائية تنسيقية.

3- العملية$\otimes$ توزيعية علي +.

مبرهنة 2 . اذا كانت $(M_n(R), +, \otimes)$ حلقة ,فأن عناصرها لا تكون قواسم للصفر.

مبرهنة 3 . اذا كانت $(M_n(R), +, \otimes)$ حلقة ,فأن عناصرها لا تكون عديمة القوي.

مبرهنة 4 . اذا كانت $(M_n(R), +, \otimes)$ حلقة ,فأن عناصرها لا تكون جامدة.

تمهيدية 5. اذا كانت R مجموعة الاعداد الحقيقية فان $(M_{mn}(R), +, \odot)$ حلقة بالنسبة لعملية جمع المصفوفات وضرب هادامار لأنها تحقق شروط الحلقة:

1- $(M_{mn}(R), +)$ زمرة تبديلية.

2- $\odot$ عملية ثنائية تنسيقية.

3- العملية $\odot$ توزيعية علي +.

مبرهنة 6 . اذا كانت $(M_{mn}(R), +, \odot)$ حلقة , فأن عناصرها لا تكون قواسم للصفر.

مبرهنة 7. اذا كانت $(M_{mn}(R), +, \odot)$حلقة ,فأن عناصرها لا تكون عديمة القوي.

مبرهنة 8 . اذا كانت $(M_{mn}(R), +, \odot)$ حلقة ,فأن عناصرها لا تكون جامدة عدا العنصر المحايد.

4 المناقشة:

4-1 حلقة المصفوفات المعرف عليها ضرب كرونكر $(M_n(R), +, \otimes)$:

الان سوف نثبت المصفوفات من النوع$n \times n$ تكون حلقة تحت عمليتي الجمع العادي للمصفوفات وضرب كرونكر وذلك من خلال اثبات التمهيدية(1).

تمهيدية1:البرهان لتكن R مجموعة الاعداد الحقيقية نريد اثبات ان $(M_n(R), +, \otimes)$ حلقة بالنسبة لعملية جمع المصفوفات وضرب كرونكر وسنثبت هذا بالبرهان المباشر

1–المصفوفة الصفرية من النوع $n \times n$ هي المحايد الجمعي

لكل $A,B,C \in M_n(R)$ فإن $(A+B)+C = A+(B+C)$ التنسيق متحقق

لكل $A \in M_n(R)$ يوجد $-A$ بحيث ان $A+(-A) = O$

(من خواص جمع المصفوفات)

اذن $(M_n(R),+)$ تكون زمرة

و بما ان لكل $A,B \in M_n(R)$ فإن $A+B = B+A$ (من خواص جمع المصفوفات)

اذن $(M_n(R),+)$ زمرة تبديلية.

2–لكل $A,B,C \in M_n(R)$ فإن $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$

تم اثباته في (رمضان ومحمد ,2006 ,ص405),

اذن التنسيق متحقق بالنسبة للضرب كرونكر.

3–لكل $A,B,C \in M_n(R)$ فإن $A \otimes (B+C) = (A \otimes B) + (A \otimes C)$

تم اثباته في (رمضان ومحمد ,2006 ,ص405),

اذن توزيع ضرب كرونكر علي الجمع متحقق .

اذن $(M_n(R),+,\otimes)$ تكون حلقة.

□

ملاحظات:

1– الحلقة $(M_n(R),+,\otimes)$ غير تبديلية لان $A \otimes B \neq B \otimes A$ حيث $A,B \in M_n(R)$ (رمضان ومحمد ,2006 ,ص403) .

2– لا تحتوي علي عنصر محايد لان لأي $A,I \in M_n(R)$ فان $A_{n\times n} \otimes I_{n\times n} = C_{(nn\times nn)=}C_{n^2\times n^2}$.

3– لا يوجد بها عناصر قابلة للعكس لان لا يوجد بها محايد.

4– لا تكون منطقة صحيحة لأنها لا تحتوي علي محايد وليست تبديلية.

5– لا تكون حقل لعدم احتوائها عناصر قابلة للعكس.

الان سوف ندرس عناصر هذه الحلقة اذا كانت قاسمة للصفر او عديمة القوي او جامدة من خلال اثبات المبرهنات , (2, 3 , 4).

مبرهنة2. البرهان نريد اثبات ان $(M_n(R),+,\otimes)$ لا تحتوي قواسم الصفر وسنثبت هذا البرهان بالتناقض

نفرض ان $(M_n(R),+,\otimes)$ تحتوي قواسم الصفر

اذن يوجد $A,B \in M_n(R)$;

حيث $A \neq O, B \neq O$;

نفرض ان $A \otimes B = O$;

فان $A \otimes B = [a_{ij}B] = 0$;

اذن اما $a_{ij} = 0$ لكل $i,j = 1,2,\dots,n$ او $B = O$.

وهذا تناقض مع اختيار A, B ;

اذن $A \otimes B \neq O$

اذن $(M_n(R), +, \otimes)$ لا تحتوي قواسم الصفر.

□

مبرهنة 3 . البرهان نريد اثبات ان $(M_n(R), +, \otimes)$ لا تحتوي اي عنصر عديم القوي وسنثبت هذا البرهان بالحالات

نفرض ان $A \in M_n(R)$;

بما ان$A^n = A \otimes A^{(n-1)}$ تم اثباته في **(**رمضان ومحمد ,2006, ص407**)** ;

نفرض ان $A^n = O$;

بما ان حلقة كرونكر لا تحتوي قواسم الصفر (من مبرهنة 2);

اذن اما $A = O$ او $A^{(n-1)} = 0$

وفي كلتا الحالتين لا يكون A عنصر عديم القوي.

□

***مبرهنة* 4**. البرهان نريد اثبات ان $(M_n(R), +, \otimes)$ لا تحتوي عناصر جامدة وسنثبت هذا بالبرهان المباشر

نفرض ان $A \in M_n(R)$;

بما ان $A^{[2]} = A \otimes A$ تم اثباته في **(**رمضان ومحمد ,2006, ص407**)**;

حيث ان $A^{[2]}$ من نوع$2n \times 2n$

اذن $A^{[2]} \neq A$

فان A ليس عنصر جامد.

□

4−2 حلقة المصفوفات المعرف عليها ضرب هادامار $(\boldsymbol{M_{mn}(R)}, +, \odot)$:

الان سوف نثبت ان المصفوفات من النوع $m \times n$ تكون حلقة تحت عمليتي الجمع العادي للمصفوفات وضرب هادامار وذلك من خلال اثبات التمهيدية(5).

تمهيدية 5. البرهان لتكن R مجموعة الاعداد الحقيقية نريد اثبات ان $(M_{mn}(R), +, \odot)$ حلقة بالنسبة لعملية جمع المصفوفات وضرب هادامار وسنثبت هذا بالبرهان المباشر

1−نريد اثبات انها زمرة تبديلية

المصفوفة الصفرية من النوع $m \times n$ هي المحايد الجمعي

لكل $A, B, C \in M_{mn}(R)$ فإن $(A + B) + C = A + (B + C)$ التنسيق متحقق

لكل $A \in M_{mn}(R)$ يوجد $-A$ بحيث ان $A + (-A) = O$

(من خواص جمع المصفوفات)

اذن $(M_{mn}(R),+)$ تكون زمرة

و بما ان لكل $A,B \in M_{mn}(R)$ فإن $A+B=B+A$ (من خواص جمع المصفوفات)

اذن $(M_{mn}(R),+)$ زمرة تبديلية.

2-لكل $A,B,C \in M_{mn}(R)$ فإن $(A\odot B)\odot C = A\odot(B\odot C)$تم اثباته في (Styan , 1973,ص 220),

اذن التنسيق متحقق بالنسبة للضرب هادامار.

3-لكل$A,B,C \in M_{mn}(R)$ فإن $A\odot(B+C)=(A\odot B)+(A\odot C)$ تم اثباته في (Million,2007,ص 2),

اذن توزيع ضرب هادامار علي الجمع متحقق .

اذن $(M_{mn}(R),+,\odot)$ تكون حلقة.

□

ملاحظات:

1- الحلقة $(M_{mn}(R),+,\odot)$ تكون تبديلية, أي لكل $A,B \in M_{mn}(R)$ فان$A\odot B = B\odot A$ تم اثباته في (Million,2007,ص 1).

2- الحلقة$(M_{mn}(R),+,\odot)$ تكون ذات محايد يرمز له بالرمز J_{mn} تم اثباته في (Million,2007,ص 1).

3- الحلقة $(M_{mn}(R),+,\odot)$تكون عناصرها قابلة للعكس, أي لكل $O \neq A \in M_{mn}(R)$, يوجد $[\widehat{A}]_{ij}=[A_{ij}]^{-1}$ حيث $A\odot \hat{A} = J_{mn}$ تم اثباته في(Million,2007,ص 2).

4- الحلقة $(M_{mn}(R),+,\odot)$ تكون منطقة صحيحة, لأنها تبديلية وذات محايد ولا تحتوي قواسم الصفر.

5- الحلقة $(M_{mn}(R),+,\odot)$ تكون حقل, لأنها تبديلية وذات محايد ولكل عنصر يوجد معكوس.

الان سوف ندرس عناصر هذه الحلقة اذا كانت قاسمة للصفر او عديمة القوي او جامدة من خلال اثبات المبرهنات , (6 , 7, 8).

مبرهنة6. البرهان نريد اثبات ان $(M_{mn}(R),+,\odot)$ لا تحتوي قواسم الصفر وسنثبت هذا البرهان بالتناقض

نفرض ان $(M_{mn}(R),+,\odot)$ تحتوي قواسم الصفر

اذن يوجد $A,B \in M_{mn}(R)$;

حيث $A \neq O, B \neq O$;

نفرض ان $[A\odot B]_{ij} = O$; لكل $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$;

فان $[A]_{ij}[B]_{ij} = 0$;

اذن اما $[A]_{ij} = 0$ او $[B]_{ij} = 0$

وهذا تناقض مع اختيار A, B ;

اذن $[A \odot B]_{ij} \neq O$ لكل $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$;

اذن $(M_{mn}(R), +, \odot)$ لا تحتوي قواسم الصفر.

□

مبرهنة7. البرهان نريد اثبات ان $(M_{mn}(R), +, \odot)$ لا تحتوي اي عنصر عديم القوي وسنثبت هذا بالبرهان المباشر

نفرض ان $A \in M_{nm}(R)$; $A^n = O$

اذن $[A]_{ij}^n = 0$ لكل $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$;

$$[A]_{ij}^n = \underbrace{[A \odot A \dots \odot A]_{ij}}_{n \text{ من المرات}} = 0 \quad ;$$

فان $A = O$, $\underbrace{[A \odot A \dots \odot A]_{ij}}_{n-1 \text{ من المرات}} = 0$;

اذن; $[A]_{ij}^{n-1} = 0$ $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$;

اذن الحلقة $(M_{mn}(R), +, \odot)$ لا تحتوي عناصر عديمة القوي.

□

مبرهنة 8. البرهان نريد اثبات ان $(M_{mn}(R), +, \odot)$ لا تحتوي عناصر جامدة عدا المحايد وسنثبت هذا بالبرهان المباشر

نفرض ان $A \in M_{mn}(R)$, $[A]_{ij}^2 = [A \odot A]_{ij} = [A]_{ij}[A]_{ij}$ لكل $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$;

اذا كان $[A]_{ij}^2 = [A]_{ij}$ لكل $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$

فان $[A]_{ij}[A]_{ij} = [A]_{ij}$ $*$

بما ان $(M_{mn}(R), +, \odot)$ حلقة تكون عناصرها قابلة للعكس (Million,2007,ص 2);

اذن يوجد $[\hat{A}]_{ij} \in M_{mn}(R)$ لكل $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$;

بضرب في $[\hat{A}]_{ij}$ في $*$

$[A]_{ij}[A]_{ij}[\hat{A}]_{ij} = [A]_{ij}[\hat{A}]_{ij}$ لكل $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$

اذن $[A]_{ij}[J_{mn}]_{ij} = [A]_{ij}(1) = [J_{mn}]_{ij}$ لكل $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$;

بما ان $[J_{mn}]_{ij} = 1$ لكل $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ (Million,2007,ص 2);

اذن $[A]_{ij} = (1)$;

العنصر جامد في هذه الحلقة هو المحايد فقط.

□

5 الاستنتاجات :

1. تعتمد خواص الحلقة علي العملية الثنائية المعرفة عليها .
2. تختلف الحلقتان $(M_n(R), +, \otimes)$, $(M_{mn}(R), +, \odot)$ في بعض الخواص وتتشابه في الأخرى.

فيما يلي جدول يبين هذا الاختلاف والتشابه

$(M_n(R),+,\otimes)$	$(M_{mn}(R),+,\odot)$
تكون حلقة	تكون حلقة
ليست تبديلية	تبديلية
لا تحتوي عنصر محايد	تحتوي عنصر محايد
لا تحتوي قواسم الصفر	لا تحتوي قواسم الصفر
لا تكون منطقة صحيحة	تكون منطقة صحيحة
لا تحتوي عناصر معدومة القوي	لا تحتوي عناصر معدومة القوي
لا تحتوي عناصر جامدة	لا تحتوي عناصر جامدة عدا الواحد
لا تحتوي عناصر قابلة للعكس	تحتوي عناصر قابلة للعكس
لا تكون حقل	تكون حقل

المراجع :

رمضان محمد جهيمة, علي محمد صقر .(2000م). *الجبر المجرد* ,دار الكتاب الجديدة, الطبعة الاولي ,بيروت ,لبنان.

رمضان محمد جهيمة, محمد علي صاحب مجي.(2006م). جبر *المصفوفات*, دار الكتاب الجديد المتحدة ,الطبعة الاولي ,بيروت ,لبنان.

Abadir , K. M. , & Magnus J.R. (2002) .Notation in econometrics: a proposal for standard. The Econometrics Journal, 5(1) , 76 – 90 .

Ando ,T. (1995) .Majorization relations for hadamard products .linear Algebra and its Applications , 223- 224 , 57 - 64 .

Atteya , M. J. (2016). Kronecker Product with applications .MJ Journal on Algebra and Its Applications, 1 (1) , 1-4 .

Graham, A. (1981). *Kronecker Products and matrix calculus: with applications* New York . Dover Publications .

Hiai, F.,& Lin , M.(2017). On an eigenvalue inequality involving the Hadamard product, Linear Algebra and Its Applications, 515 , 313–320 .

Magnus ,J. R. (1988) . *Linear structures* (1nd ed.). Oxford : Oxford University press .

Million, E. (2007). The Hadamard Product . Course Notes,3(6),1-7 .https://cut.ly/pz4nhUt origincache-internal-services-all.fbsbx.com.

Styan , G. P. H. (1973). Hadamard product and multivariate statistical analysis. Liner Algebra and Its Applications , 6 ,217-240 .

Sydsaeter , K. , Strom ,A. , & Berik ,P. (1999) *Economists mathematical manual* (4nd ed.). Berlin : Springer Science .

Tollis , T .(1987) . On means of positive definite matrices, Czechoslovak Mathematical Journal, 37(4), 628 - 641 .