HNSJ Humanitarian & Natural Sciences Journal
ISSN: (e) 2709-0833
www.hnjournal.net
مجلة العلوم الإنسانية والطبيعية
مجلة علمية محكمة
معامل التأثير العربي للعام 2020م = 0.44

عنوان البحث

بعض الطرق التحليلية لحل معادلتي فريدهولم وفولتيرا التكاملية من النوع الثاني

إسراء عبدالمجيد عمر[1]، مودة عبدالمجيد المختار[1]، أ. زينب أحمد خليفة[1]

[1] جامعة غريان

بريد الكتروني: Zaynab.zuwaliyah@gu.edu.ly

تاريخ القبول: 2021/02/24م تاريخ النشر: 2021/03/01م

المستخلص

يهدف هذا البحث لدراسة مفاهيم المعادلات التكاملية التي حلها له أهمية في العديد من التطبيقات العلمية وتصنيفها حسب نوع النواة التي يعتمد عليها الحل ودراسة بعض الطرق التحليلية لحل معادلتي فريدهولم وفولتيرا التكاملية من النوع الثاني وتطبيق بعض الطرق التحليلية لإيجاد الحل الصحيح حيث أثبتت الطرق التحليلية وجود ووحدانية الحل، هذه الطرق التحليلية نحصل منها على الحل التحليلي، تم التركيز على الحلول التحليلية لمعادلتي فريدهولم وفولتيرا التكاملية من النوع الثاني نظراً لمداها الواسع في علوم الفيزياء والهندسة، وللحصول على الحل التقريبي يجب تطبيق أحد البرامج العددية وأهمها الماتلاب(Matlab).

الكلمات المفتاحية: المعادلات التكاملية، معادلة فريدهولم، معادلة فولتيرا، الطرق التحليلية.

RESEARCH ARTICLE

SOME OF THE ANALYTICAL METHODS FOR SOLVING THE FREDHOLM AND VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS OF THE SECOND TYPE

Esraa Abdulmajid Omar[1], Moudah Abdulmajid Almukhtar[1], Zaynab Ahmed Khalleefah[1]

[1] Gharyan University
Email: Zaynab.zuwaliyah@gu.edu.ly

Accepted at 24/02/2021 **Published at 01/03/2021**

Abstract

This research aims to study the concepts of integrative equations whose solution is of importance in many scientific applications, classifying them according to the type of nucleus on which the solution depends, studying some analytical methods for solving the Fredholm and Volterra integral equations of the second type, and applying some analytical methods to find the correct solution, as the analytical methods proved the existence and unity of the solution. From these analytical methods, we obtain the analytical solution. The focus has been on the analytical solutions of the Fredholm and Volterra integral equations of the second type due to their wide range in physics and engineering, and to obtain an approximate solution, one of the numerical programs must be applied, the most important of which is Matlab.

Key Words: integral equations, Fredholm equation, Volterra equation, analytical methods.

مقدمة

عندما تعقدت العلوم المختلفة نتيجة التداخلات بينها وتطورت بشكل كبير وبدأ العلماء بدراسة الظواهر الطبيعية سواء كانت فيزيائية، كيميائية، بيولوجية أو هندسية كان للمعادلات التكاملية بمختلف أنواعها دوراً بارزاً في تفسير هذه الظواهر وإيجاد الحلول المختلفة لها سواء كانت تحليلية أو عددية.

المعادلات التكاملية لها أهميتها الخاصة بين أنواع العلوم الرياضية المختلفة مثل المعادلات التفاضلية والجزئية، التحليل الدالي، نظرية المؤثرات والمحولات والدوال الخاصة.

ولذلك يمكن القول بأنه لا يوجد علم من العلوم المختلفة إلا وتلعب المعادلات التكاملية دوراً بارزاً فيه ولذلك نجد أن كثيراً من الباحثين استطاعوا استنباط كثيراً من الطرق المختلفة لحل المعادلات التكاملية سواء كانت النواة الخاصة بالمعادلة التكاملية متصلة أو غير متصلة وغيرها من الطرق تتمثل في كونها طرق تحليلية أو عددية.

في أحد الأبحاث تم تقديم طريقة تحليلية جديدة لحل أنظمة المعادلات التكاملية التفاضلية الخطية وهي طريقة جديدة وقوية تم الحصول من خلالها على علاقات متكررة فعالة لحل هذه الأنظمة وهي طريقة مناسبة لاستخدامها كبديل للأساليب الرياضية المستخدمة في مثل هذه المسائل[1].

وبصورة خاصة لأنظمة معادلات فولتيرا التكاملية من النوع الثاني تم حلها بطريقة جديدة(a new modified homotopy perturbation method(NHPM)) تم فيها إثبات وجود ووحدانية الحل لهذه المعادلات ونوقشت مجموعة من الأمثلة لمعادلات فولتيرا الخطية وغير الخطية لإثبات كفاءة هذه الطريقة[2].

وفي دراسة أخرى شملت دراسة بعض الطرق التحليلية المعروفة وحل بعض الأمثلة وتمت مقارنة النتائج التحليلية والنتائج العددية وتم إثبات قرب النتائج التقريبية من النتائج التحليلية[3].

المعادلة التكاملية

تعريف: هي المعادلة التي يكون فيها المجهول تحت علامة التكامل وقد يضاف المجهول أيضاً خارج التكامل في أحد طرفي المعادلة، على سبيل المثال حيث أن: $a \le x \le b$ و $a \le y \le b$

فإن المعادلات:

$$f(x) = \int_a^b k\,(x,y)\,\varphi\,(y)\,dy$$

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b k(x,y)\varphi(y)dy$$

$$\varphi(x) = \int k(x,y)[\varphi(y)]^2 dy$$

تسمى معادلات تكاملية. الدالة $\varphi(x)$ هي الدالة المجهولة وجميع الدوال الأخرى معلومة، هذه الدوال قد تكون دوال مركبة أو حقيقية من القيم الحقيقية x, y.

المعادلات التكاملية تستخدم عموماً في العديد من التطبيقات الفيزيائية الرياضية، كذلك تستخدم في رسم صيغ الحلول للمعادلات التفاضلية التي يصعب حلها في الواقع، ويمكن استبدال المعادلة التفاضلية بالمعادلة التكاملية بحيث أن حل المعادلة التكاملية يحقق بشكل تلقائي الشروط الموضوعة على المسألة سواء كانت حدية، ابتدائية أو مختلطة، كذلك المعادلات التكاملية مفيدة في معظم تطبيقات التحليل الدالي والتحليل العددي.

أنواع المعادلات التكاملية

تصنف المعادلات التكاملية بناءاً على عدة اعتبارات وعلى حسب الصيغة التي تأخذها حيث تصنف إلى عدة أنواع منها:

1- المعادلات التكاملية الخطية

يقال عن المعادلة التكاملية أنها خطية إذا كانت العمليات الخطية منطبقة ومتحققة على الدوال المجهولة المعادلة التكاملية الخطية تكون على الصورة العامة:

$$\mu\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)\varphi(y)dy \qquad (1)$$

في المعادلة (1) λ ثابت يحمل معاني فيزيائية عن خواص المادة الدالة، $k(x,y)$ معلومة وتسمى نواة المعادلة وتحمل صفات وخواص المادة المستخدمة وأحياناً تكون متصلة أو غير متصلة.

والدالة $g(x)$ معلومة أيضاً وتمثل دالة السطح المراد حساب التكامل عليه بينما $\varphi(x)$ هي الدالة المجهولة المطلوب تعيينها وهي تمثل في العلوم الفيزيائية دالة الجهد. والمعادلة (1) خطية لأن درجة الدالة المجهولة هي الدرجة الأولى.

والمعادلات التكاملية الخطية تصنف بشكل أساسي ضمن فئتين أساسيتين هما معادلات فريدهولم التكاملية وفولتيرا التكاملية إلا أننا نميز أربع أصناف أخرى بالإضافة إلى الصنفين الأساسيين وهي:

المعادلات التكاملية التفاضلية، المعادلات التكاملية الشاذة، معادلات فولتيرا – فريدهولم التكاملية ومعادلات فريدهولم–فولتيرا التكاملية التفاضلية.

- معادلات فريدهولم التكاملية

تظهر المعادلات التكاملية عادة في الدراسات الفيزيائية والكيميائية والبيولوجية والتطبيقات الهندسية التي يمكن وضع نماذج رياضية لها موصوفة بمسائل قيم ابتدائية أو حدية.

وفي جميع صيغ فريدهولم التكاملية تكون نهاية الجزء العلوي للتكامل عبارة عن ثابت محدد معلوم b وينتمي إلى الفترة $x \in [a,b]$ وهي كما يلي :

1. معادلة فريدهولم التكاملية من النوع الأول تكون $\mu = 0$ وبالتالي تأخذ الشكل

$$g(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)\varphi(y)dy = 0$$

2. معادلة فريدهولم التكاملية من النوع الثاني عند فرض أن $\mu = Costant \neq 0$

$$\mu\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)\varphi(y)dy$$

3. معادلة فريدهولم التكاملية المتجانسة وهي حالة خاصة من (2) حيث نضع في المعادلة (1)

$$\mu = 1\,, g(x) = 0$$

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b k(x,y)\varphi(y)dy$$

4. اذا كانت $\mu = \mu(x)$ فإن المعادلة (1) تمثل معادلة فريدهولم التكاملية من النوع الثالث.

- معادلات فولتيرا التكاملية الخطية

يعطى الشكل القياسي لمعادلات فولتيرا التكاملية الخطية بالشكل

$$\varphi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt$$

من الملاحظ أن معادلة فولتيرا الخطية هي حالة خاصة من معادلة فريدهولم التكاملية الخطية، وذلك في حال اعتبرنا أن

$$K(x,t) = 0; x < t \leq b$$

إن قيمة الدالة $\varphi(x)$ في المعادلات السابقة تحدد الأصناف الإضافية التالية للمعادلات التكاملية الخطية وهي:

1. اذا كان $\varphi(x) = 0$ فإننا سنحصل على معادلة فريدهولم التكاملية الخطية من النوع الأول و التي لها الشكل

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt = 0$$

ومعادلة فولتيرا التكاملية الخطية من النوع الأول والتي لها الشكل التالي

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt = 0$$

2. اذا كان $\varphi(x) = 1$ فإننا سنحصل على معادلة فريدهولم التكاملية الخطية من النوع الثاني والتي لها الشكل

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt$$

ومعادلة فولتيرا التكاملية الخطية من النوع الثاني والتي لها الشكل

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt$$

ملاحظة: نقول عن المعادلات التكاملية الخطية السابقة أنها متجانسة إذا وفقط إذا كانت $f(x) = 0$ كما نقول أن المعادلات التكاملية شاذة إذا وفقط إذا كان التكامل الموجود ضمن المعادلة معتلاً.

– المعادلات التكاملية – التفاضلية

وهي المعادلات التي يظهر فيها مشتق الدالة المجهولة في طرف من المعادلة والدالة المجهولة في الطرف الآخر تحت إشارة التكامل.

ويمكن لهذا النوع من المعادلات التكاملية أن تكون من نمط معادلات فريدهولم أو معادلات فولتيرا.

– المعادلات التكاملية الشاذة

نقول عن معادلة تكاملية أنها شاذة إذا كان أحد حدود التكامل أو كليهما لانهاية، أو إذا كانت قيمة نواة المعادلة غير منتهية في نقطة أو أكثر من نقاط مجال التكامل، وتعتبر دالة آبل

$$x^2 = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u(t))dt$$

ومعادلة آبل المعممة

$$x = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} u(t)dt; 0 < \alpha < 1$$

ومعادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني ضعيفة الشذوذ

$$u(x) = 1 - 2\sqrt{x} - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u(t)dt$$

والشكل القياسي لمعادلات فولتيرا – فريدهولم التكاملية

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \int_a^x K_1(x,t)u(t)dt + \int_a^b K_2(x,t)u(t)dt$$

2– المعادلات التكاملية غير الخطية

المعادلة التكاملية غير الخطية هي معادلة يكون المجهول فيها دالة غالبا ما نرمز إليها بالرمز u, φ أو حرف آخر، وتظهر فيها الدالة المجهولة داخل رمز التكامل وقد تضاف إلى خارجه،وتكون صورتها العامة

$$f(x) = \int_a^b k(x,t)F\big(u(t)\big)dt$$

أو

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)F\big(u(t)\big)dt$$

فإذا كان$x = b$ (متغير) فهي معادلة فولتيرا التكاملية غير الخطية أما إذا كان b ثابت فهي معادلة فريدهولم التكاملية غير الخطية.

تسميات

1) u هي الدالة المجهولة والتي يطلب تحديدها.

2) f هي دالة معلومة معرفة على المجال $[a,b]$ وهي تلعب نفس دور دالة الطرف الثاني في المعادلات التفاضلية.

3) k تسمى نواة الحالة وهي دالة ذات متغيرين معرفة على المربع $D = [a,b] \times [a,b]$

4) λ ثابت ويسمى وسيط المعادلة التكاملية.

5) F دالة غير خطية في $u(t)$.

ملاحظة: سميت المعادلات التكاملية السابقة بغير الخطية لأن الدالة المجهولة u مركب من دالة غير خطية.

مثل

$$F(t) = \exp(t) \to f(x) = \int_a^b k(x,t)\exp\big(u(t)\big)\,dt$$

توجد عدة أشكال من المعادلات التكاملية غير الخطية أشهرها

1. معادلة هامريشتين التكاملية غير الخطية

نسمي معادلة هامريشتين التكاملية غير الخطية كل معادلة تكتب من الشكل

$$\mu u(x) = f(x) + \lambda \int_D k(x,t)F\big(t,u(t)\big)dt \qquad ,D \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}^*$$

ونميز هنا حالتين مختلفتين

حالة (1): $\mu = 0$

$$\mu = 0 \to f(x) = \lambda \int_a^x k(x,t)F\big(t,u(t)\big)dt$$

وتسمى بمعادلة هامريشتين– فولتيرا التكاملية غير الخطية من الصنف الأول.

حالة (2): $\mu = 1$

$$\mu = 1 \to u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)F\big(t,u(t)\big)dt$$

وتسمى بمعادلة هامريشتين– فولتيرا التكاملية غير الخطية من الصنف الثاني.

2. معادلة فريدهولم– فولتيرا التكاملية غير الخطية

نسمي معادلة فريدهولم – فولتيرا التكاملية غير الخطية كل معادلة تكاملية تكتب على الصورة

$$\mu u(\bar{x},\bar{t}) + \lambda \int_\Omega k(\bar{x}-\bar{z},\bar{y}-\bar{s})F(t,u(\bar{z},\bar{s}))d\bar{z}d\bar{s} + \lambda \int_0^t G(t,T)u(\bar{x},\bar{y},T)dT$$
$$= f(\bar{x},\bar{y},T), \bar{x} = (x_1,x_2,x_3,\dots,x_n), \bar{t} = (t_1,t_2,t_3,\dots,t_n)$$

مع Ω تعتمد على منحنى التكامل.

3. معادلة يورشون– فولتيرا التكاملية غير الخطية

نسمي معادلة يورشون– فولتيرا التكاملية غير الخطية كل معادلة تكتب على الشكل

$$\mu u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k\big(x,t,u(t)\big)dt \qquad 0 \le x \le T < +\infty$$

ونميز هنا ثلاث حالات مختلفة

حالة (1): $\mu = 0$

$$\mu = 0 \to f(x) = \lambda \int_0^x k\big(x,t,u(t)\big)dt$$

وهي معادلة يورشون– فولتيرا التكاملية غير الخطية من الصنف الأول.

حالة (2): $\mu = cet \neq 0$

$$\mu = cet \neq 0 \rightarrow u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k\big(x,t,u(t)\big)dt$$

وهي معادلة يورشون– فولتيرا التكاملية غير الخطية من الصنف الثاني.

حالة (3): $\boldsymbol{\mu = \mu(x)}$

$$\mu = \mu(x) \rightarrow \mu(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k\big(x,t,u(t)\big)dt$$

وهي معادلة يورشون– فولتيرا التكاملية غير الخطية من الصنف الثالث.

4. معادلة كوشي التكاملية الشاذة غير الخطية

تسمي معادلة كوشي التكاملية الشاذة غير الخطية كل معادلة تكاملية تكتب على الشكل

$$a(x)u(x) + b(x)\int_\Gamma \frac{u(t)}{t-x}dt + \int_\Gamma F\big(x,t,u(t)\big)dt = f(x)$$

حيث a, b و f دوال معطاة في x بينما u دالة مجهولة يطلب تعيينها .

5. معادلات فريدهولم التكاملية غير الخطية

نسمي معادلة فريدهولم التكاملية غير الخطية كل معادلة تكاملية تكتب من الشكل

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)F\big(u(t)\big)dt$$

وهي من الصنف الثاني وغير متجانسة أما إذا كانت $f = 0$ فهي متجانسة .

* المعادلة التكاملية $f(x) = \int_a^b k(x,t)F(u(t))dt$ هي معادلة فريدهولم غير الخطية من الصنف الأول.

تصنيف المعادلات التكاملية بالنسبة للنواة

المعادلات التكاملية يمكن تصنيفها وتقسيمها بالنسبة للنواة إلى

1– معادلة تكاملية ذات نواة $k(x,y)$ متصلة في الفترة $[a,b]$ ولها الشرط $|k(x,y)| \leq M$ حيث M ثابت.

2– معادلة تكاملية ذات نواة شاذة ولها الشرط

$$\left(\int_a^b \int_a^b |k(x,y)|^2 dx\mathrm{dy}\right)^{\frac{1}{2}} = \mathrm{C}$$

حيث C قيمة محدودة منتهية، وبالتالي فإن المعادلة التكاملية تسمى معادلة من نوع فريدهولم.

وتصنف المعادلات التكاملية على حسب النواة الشاذة على النحو التالي

1. إذا كانت النواة تأخذ الشكل

$$k(x,y) = \begin{cases} \dfrac{A(x,y)}{|x-y|^\alpha} & , \ 0 \leq \alpha < 1 \qquad (2) \\ A(x,y)\ln|x-y| & \qquad (3) \end{cases}$$

حيث $\mathrm{A(x,y)}$ دالة متصلة هي ومشتقاتها، في هذه الحالة يقال عن المعادلة التكاملية أنها ضعيفة الشذوذ بالنسبة لنواة كارلمان في (2) أو نواة لوغاريتمية في (3).

2. إذا كانت النواة على الشكل

$$k(x,y) = \frac{B(x,y)}{x-y}$$

فإنها تسمى نواة كوشي ، حيث $B(x,y)$ دالة متصلة هي ومشتقاتها.

3. إذا كانت النواة على الشكل

$$k(x,y) = \frac{C(x,y)}{(x-y)^m} \qquad , \mathrm{m} \geq 2$$

فإن المعادلة التكاملية تسمى معادلة قوية الشذوذ عندما $m = 2$ ولكن إذا كانت $m > 2$ فإن المعادلة التكاملية تسمى معادلة شديدة الشذوذ ، حيث أن $C(x,y)$ دالة متصلة هي ومشتقاتها.

4. إذا كانت النواة على الشكل

$$k(x,y) = \frac{D(x,y)}{(x-y)^{\alpha}} \qquad ,0 \le \alpha \le 1$$

حيث $D(x,y)$ دالة متصلة هي ومشتقاتها ، وبالتالي فإن المعادلة التكاملية تسمى صيغة آبل.

5. النواة القابلة للفصل

تسمى النواة $k(x,y)$ نواة قابلة للفصل إذا أمكن التعبير عنها كمجموع عدد من الحدود المنتهية بحيث أن كل حد عبارة عن حاصل ضرب دالة في x فقط ودالة في y فقط على النحو التالي

$$k(x,y) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\mathrm{b_i}(y)$$

6. النواة المتماثلة:

الدالة المركبة القيمة $k(x,y)$ تسمى متماثلة إذا كان : $k(x,y) = k^*(x,y)$ حيث أن $(*)$ تعبر عن تبديل متغيرات الدالة، وإذا كانت النواة حقيقية فإن $k(x,y) = k(x,y)$ أما إذا كانت $k(x,y) = -k(x,y)$ فإن هذه النواة تسمى *Skew – symmetric*

حل معادلة فريدهولم التكاملية

$$\varphi(x) - \lambda \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \mathrm{K}(x,\mathrm{t})\varphi(\mathrm{t})\mathrm{dt} = \mathrm{f}(x) \qquad (4)$$

$$\varphi(x) - \lambda \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \mathrm{K}(x,\mathrm{t})\varphi(\mathrm{t})\mathrm{dt} = 0 \qquad (5)$$

نقول عن $\varphi(x)$ أنه حل للمعادلة التكاملية (4) و (5) اذا حولها إلى متطابقة عند تعويضه فيها عندما $x \in (\mathrm{a},\mathrm{b})$.

الطرق التحليلية العامة لحل معادلة فردهولم التكاملية

لحل معادلة فريدهولم فإن هناك عدداً من الطرق التي تطبق لهذا الغرض ونذكر بعض الطرق التحليلية لحل معادلة فريدهولم التكاملية من النوع الثاني ومنها

طريقة النواة القابلة للفصل (المنحلة)، طريقة الحساب المباشر، طريقة التحليل المعدلة، طريقة التقريبات المتتالية، طريقة التحليل لأدوميان وطريقة الحل المتسلسل.

1–طريقة التقريبات المتتالية

نفرض أن كلا من التابعين $f(x)$ و $k(x,t)$ قابلان للمكاملة تربيعياً، ولنبدأ بالتقريب من الرتبة صفر

$$\varphi_0(x) = \mathrm{f}(x) \qquad (6)$$

وبتعويض هذا التقريب في معادلة فريدهولم

$$\varphi(x) = \mathrm{f}(x) + \lambda \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \mathrm{K}(x,\mathrm{t})\varphi(\mathrm{t})\mathrm{dt} \qquad (7)$$

نجد التقريب من الرتبة الأولى

$$\varphi_1(x) = \mathrm{f}(x) + \lambda \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \mathrm{K}(x,\mathrm{t})\varphi_{\mathrm{o}}(\mathrm{t})\mathrm{dt}$$

نعوض في (7) فنحصل على التقريب من الرتبة الثانية وهكذا أن التقريب من الرتبة $(n+1)$ هو

$$\varphi_{\mathrm{n+1}}(x) = \mathrm{f}(x) + \lambda \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \mathrm{K}(x,\mathrm{t})\varphi_{\mathrm{n}}(\mathrm{t})\mathrm{dt}$$

فإذا سعى $\varphi_n(x)$ بإنتظام إلى نهاية معينة عندما $n \to \infty$ فإن هذه النهاية هي الحل المطلوب ولدراسة هذه النهاية نجري الحسابات بالتفصيل نجد

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) f(t) dt$$

$$\varphi_2(x) = f(x) + \kappa \int_a^b K(x,t) f(t) dt +$$

$$+\lambda^2 \int_a^b K(x,t) \left[\int_a^b K(t,s) f(s) ds \right] dt \qquad (8)$$

ويمكن تبسيط هذه الصيغة إذا وضعنا

$$K_2(x,t) = \int_a^b K(x,s) K(s,t) ds$$

وبتغيير ترتيب المكاملة في (8) نجد

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) f(t) dt + \lambda^2 \int_a^b K_2(x,t) f(t) dt$$

وبشكل مماثل نجد أن

$$\varphi_3(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) f(t) dt + \lambda^2 \int_a^b K_2(x,t) f(t) dt$$

$$+\lambda^3 \int_a^b K_2(x,t) f(t) dt$$

وبفرض أن

$$K_2(x,t) = \int_a^b K(x,s) K_2(s,t) ds$$

وبمتابعة العمل نجد

$$K_m(x,t) = \int_a^b K(x,s) K_{m-1}(s,t) ds \qquad (9)$$

وللتقريب من الرتبة $(n+1)$ لحل المعادلة التكاملية (7) هو

$$\varphi_n(x) = f(x) + \sum_{m=1}^{n} \lambda^m \int_a^b K_m(x,t) f(t) dt \qquad (10)$$

ندعو $K_m(x,t)$ النواة المكررة لـ m وذلك بفرض أن $K_1(x,t) = K(x,t)$ بالانتقال إلى النهايات عندما $n \to \infty$ نحصل على ما يسمى بمتسلسلة نيومان

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \int_a^b K_m(x,t) f(t) dt \qquad (11)$$

نرى من (9) أن

$$K_m(x,t) = \int_a^b K(x,s) K_{m-1}(s,t) ds$$

$$= \int_a^b K(x,s) \int_a^b K(s,\tau) K_{m-2}(\tau,t) d\tau ds$$

$$= \int_a^b \left[\int_a^b K(x,s) K(s,\tau) ds \right] K_{m-2}(\tau,t) d\tau$$

$$= \int_a^b K_2(x,\tau) K_{m-2}(\tau,t) d\tau$$

وبمتابعة العمل على هذا النحو نجد أن

$$K_m(x,t) = \int_a^b K_{m-1}(x,s)K(s,t)ds \qquad (12)$$

2. يبقي أن نعين الشروط التي تجعل من المتسلسلة الأخيرة متقاربة لأجل ذلك نستخدم متراجحة شفارتز فنجد

$$\left|\int_a^b K_m(x,t)f(t)dt\right|^2 \leq \left(\int_a^b \leq |K_m(x,t)|^2dt\right)\int_a^b |f(t)|^2dt \qquad (13)$$

وإذا فرضنا A نظيم f

$$\mathrm{A}^2 = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} |\mathrm{f(t)}|^2\mathrm{dt}$$

وإذا رمزنا بـ $\mathrm{C_m^2}$ للحد الأعلى للتكامل

$$\int_a^b |K_m(x,t)|^2dt$$

فإن المتباينة (13) تأخذ الشكل

$$\left|\int_a^b K_m(x,t)f(t)dt\right|^2 \leq C_m^2A^2 \qquad (14)$$

نطبق الآن المتباينة شفارتز على (14) فنجد أن

$$|k_m(x,t)|^2 \leq \int_a^b |K_{m-1}(x,s)|^2ds\int_a^b |K(s,t)|^2ds$$

وبمكاملة طرفي هذه المتباينة بالنسبة لـ t نفرض أن

$$\mathrm{B}^2 = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}}\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} |\mathrm{K(s,t)}|^2\mathrm{ds\,dt}$$

نحصل على

$$\int_a^b |K_m(x,t)|^2dt \leq B^2C_{m-1}^2$$

ومن هذه المتباينة الأخيرة نجد أن

$$\mathrm{C_m^2} \leq \mathrm{B^{2m-2}C_1^2} \qquad (15)$$

ومن (14) ، (15) نجد

$$\left|\int_a^b K_m(x,t)f(t)dt\right|^2 \leq C_1^2A^2B^{2m-2}$$

وعلى هذا فإن القيمة المطلقة للحد العام للمتسلسلة الواردة في (10) هو اصغر من $\mathrm{AC_1|\lambda|^mB^{m-1}}$ وهذا يعني أن المتسلسلة في (11) متقاربة بإنتظام اذا كان

$$|\lambda|\,B < 1 \qquad (16)$$

وهكذا نكون قد برهنا أن (6) حلاً معطى بصيغة (7) لأجل كل قيمة لـ λ تحقق الشرط (16) لنفرض الآن أن لـ (6) حلين هما $\varphi_2(x)$ ، $\varphi_2(x)$ أي

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,t)\varphi_1(t)dt$$

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,t)\varphi_2(t)dt$$

وبالطرح ويفرض أن $g(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ نجد أن

$$g(x) = \lambda\int_a^b K(x,t)g(t)dt$$

وبتطبيق متباينة شفارتز على هذه المعادلة نجد

$$|g(x)|^2 \le |\lambda|^2 \int_a^b |K(x,t)|^2 dt \int_a^b |g(t)|^2 dt$$

وبالمكاملة بالنسبة لـ x نجد

$$\int_a^b |g(x)|^2 dx \le |\lambda|^2 \int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 dx dt \int_a^b |g(t)|^2 dt$$

أو

$$\left(1 - |\lambda|^2 B^2\right) \int_a^b |g(x)|^2 dx \le 0$$

واستناداً إلى (16) نجد أنه وبفرض أن $g(x) = 0$ أي أن $\varphi_2(x)$, $\varphi_1(x)$ وذلك بفرض أن φ_1 ، φ_2 مستمران على [a , b] .

3. لننظر بعد ذلك في المتسلسلة

$$K_1(x,t) + \lambda K_2(x,t) + \cdots + \lambda^{n-1} K_n(x,t) + \cdots \qquad (17)$$

لقد تبين لنا بتطبيق متباينة شفارتز على (9) أن

$$|K_m(x,t)|^2 \le \int_a^b |K_{m-1}(x,s)|^2 ds \int_a^b |K(s,t)|^2 ds$$

وبالاستفادة من (15) وبفرض أن الحد الأعلى للتكامل

$$\int_a^b |K(s,t)|^2 ds$$

هو C'^2 فإننا نجد

$$|K_m(x,t)|^2 \le B^{2m-4} C_1^2 C'^2$$

ومنه نلاحظ أن المتسلسلة (17) متقاربة إطلاقاً إذا تحقق الشرط (16).

مثال

أدرس معادلة فريدهولم التكاملية التالية

$$u(x) = e^x + e^{-1} \int_0^1 u(t) dt$$

الحل

$$u_0(x) = 0$$
$$u_1(x) = e^x + e^{-1} \int_0^1 u_0(t) dt$$
$$u_1(x) = e^x$$
$$u_2(x) = e^x + e^{-1} \int_0^1 e^t dt$$
$$u_2(x) = e^x + e^{-1}$$
$$u_3(x) = e^x + e^{-1}$$
$$u_n(x) = e^x + 1 - e^{-(n-1)}, n \ge 1$$
$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(e^x + 1 - e^{-(n-1)}\right)$$
$$= e^x + 1$$

2-طريقة النواة الحالة

لنرمز لمجموع المتسلسلة (17) بـ $R(x,t,\lambda)$، إن هذا التابع R تحليلي في λ يسمى النواة الحالة لـ K(x, t).

$$R(x,t,\lambda) = K(x,t) + \lambda K_2(x,t) + \cdots + \lambda^{n-1} K_n(x,t) + \cdots$$

وبضرب طرفي هذه العلاقة بـ $K(s,x)$ والمكاملة بالنسبة لـ s نجد

$$\lambda\int_a^b K(s,x)R(x,t,\lambda)dx = \lambda K_2(s,t) + \lambda^2 K_2(s,t) + \cdots$$

إذن

$$R(x,t,\lambda) - K(x,t) = \lambda\int_a^b K(x,s)R(s,t,\lambda)ds \qquad (18)$$

كذلك يمكن أن نبرهن أن

$$R(x,t,\lambda) - K(x,t) = \lambda\int_a^b K(s,t)R(x,s,\lambda)ds$$

لنعد إلى المعادلة (7) ولنكتبها بالشكل

$$\frac{\varphi(x) - f(x)}{\lambda} = \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt \qquad (19)$$

وباستخدام(18) نجد

$$\frac{\varphi(x) - f(x)}{\lambda} = \int_a^b R(x,t,\lambda)g(t)d - \lambda\int_a^b\int_a^b R(x,s,\lambda)K(s,t)\varphi(t)dsdt$$

وبالاستفادةمن (19) نستطيع أن نكتب

$$\frac{\varphi(x) - f(x)}{\lambda} = \int_a^b R(x,t,\lambda)\varphi(t)dt - \int_a^b R(x,s,\lambda)[\varphi(s) - f(s)]ds$$

ومنه

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^b R(x,t,\lambda)f(t)dt \qquad (20)$$

وهنا يعني أنه ليس لمعادلة فريدهولم المفروضة سوى الحل (20) وهي حل لمعادلة فريدهولم لأن

$$\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds = \lambda\int_a^b\int_a^b K(x,s)R(x,t,\lambda)f(t)dsdt$$

وبالاعتماد على (18) نجد

$$\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds = \int_a^b R(x,t,\lambda)f(t)dt$$

ومنها نجد العلاقة

$$\varphi(x) = \lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds + f(x)$$

وهذا ما نريد اثباته.

ومن الواضح أن الحل المعطى بـ (20) لا يختلف عن الحل المعطى بمتسلسلة نيومان (11) ويمكن التحقق من ذلك مباشرة حيث نحسب أولاً التكامل

$$\int_a^b R(x,t,\lambda)f(t)dt$$

بعد تعويض التابع الحال بالمتسلسلة المعطاة ب (17) ، والمكاملة حداً بحد.

مثال

أوجد حل معادلة فريدهولم التكاملية من النوع الثاني

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi}\cos(x) + \frac{6}{\pi}\int^{\frac{\pi}{2}}\cos(x-y)\varphi(y)dy$$

الحل

النواة $k(x,y)=\cos(x-y)$ يمكن كتابتها كالأتي

$$k(x,y)=\cos(x)\cos(y)+\sin(x)\sin(y)$$

وهي نواة منفصلة تحقق

$$K(x,y)=\sum_{i=0}^{n} u_i(x)v_1(y) \qquad (a)$$

حيث

$$\left.\begin{array}{lll} u_1(x)=\cos(x) & , & u_2(x)=\sin(x) \\ v_4(y)=\cos(y) & , & v_2(x)=\sin(y) \end{array}\right\}$$

نستخدم المعادلة (a) في بعد واحد $[a,b]$ والعلاقة التالية

$$\int_a^b v_1(y)u_k(y)dy=c_{ik} \text{ ، } \int_a^b v_1(y)g(y)dy=h_i$$

يكون لدينا

$$C_{11}=\int_0^{\pi/2} v_1(y)u_1(y)dy=\int_0^{\pi/2}\cos(y)\cos(y)dy$$

$$=\int_0^{\pi/2}\cos^2(y)\,dy=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}1+\cos(2y)\,dy \qquad (b)$$

$$=\frac{1}{2}\left[y+\frac{1}{2}\sin(2y)\right|_0^{\pi/2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin(\pi)\right)-\frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{2}\sin(0)\right)=\frac{\pi}{4}$$

$$C_{12}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} v_1(y)u_2(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(y)\sin(y)\,dy=C_{21} \qquad (c)$$

$$\omega=si\,n(y) \;\rightarrow\; d\omega \;=\cos(y)dy$$

* استخدام التكامل بالتعويض

بالتعويض عن ω في المعادلة (c) نتحصل على

$$\int_0^{\pi/2}\omega d\omega\rightarrow\left[\frac{1}{2}\omega^2\right]_0^{\pi/2}=\frac{1}{2}[\sin^2(y)|_0^{\pi/2}=\frac{1}{2}\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin^2(0)\right)=\frac{1}{2}$$

$$C_{22}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} v_2(y)u_g(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(y)\sin(y)\,dy$$

$$=\int_0^{\pi/2}\sin^2(y)dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}1-\cos(2y)dy$$

$$=\frac{1}{2}\left[y-\frac{1}{2}\sin(2y)\right|_0^{\pi/2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin(\pi)\right)-\frac{1}{2}\left(0-\frac{1}{2}\sin(0)\right)$$

$$=\pi/4$$

$$h_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} v_1(y)g(y)dy=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(y)\cos(y)\,dy$$

بإستخدام العلاقة (b)

$$h_1 = \frac{-2}{\pi} - \left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$h_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} v_2(y)g(y)dy = \frac{-2}{\pi}\int_5^{\frac{\pi}{2}} \sin(y)\cos(y)dy$$

بإستخدام العلاقة (c)

$$h_2 = \frac{-2}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{\pi}$$

بالتعويض في العلاقة

$$\alpha_1 - \lambda\sum_{=i}^{n} C_{ik}\alpha_k = h_i \longrightarrow i = 1, \dots, n \qquad (d)$$

يمكن كتابة (d) في شكل مصفوفة

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda\begin{bmatrix} c_{11} & C_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{\pi}\begin{bmatrix} \frac{\pi}{4} & \frac{2}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\pi}{4} \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\pi} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{\pi} \\ -\frac{2}{\pi} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\pi} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \frac{\pi^{\,2}}{-4}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{\pi} \\ \frac{2}{\pi} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\pi} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\pi}{4} \end{bmatrix}$$

وباستخدام العلاقة

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i(x)$$

$$\varphi(x) = \frac{-2}{\pi}\cos(x) + \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2}\right)\cos x + \frac{4}{x}\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin x$$

عليـــه فإن

$$\varphi(x) = \sin x$$

حل معادلة فولتيرا التكاملية

نقول عن التابع $\varphi(x)$ أنه حل للمعادلة التكاملية (21) أو (22) أو (23) إذا حول تلك المعادلة إلى مطابقة عند تعويضها فيها

$$\varphi(x) = t(x) + \lambda\int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt \qquad (21)$$

$$\varphi(x) = \lambda\int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt \qquad (22)$$

$$\int_0^x K(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \qquad (23)$$

الطرق التحليلية العامة لحل معادلات فولتيرا التكاملية

لحل معادلة فولتيرا فإن هناك عدداً من الطرق التي تطبق لهذا الغرض وفيما يلي بعض الطرق التحليلية لحل معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني ومنها

طريقة النواة الحالة، طريقة التقريب المتتالي، طريقة الحل المتسلسل، طريقة التحليل المعدلة، طريقة الحل بالتحويل إلى مسألة قيمة ابتدائية، طريقة التغاير التكرارية وطريقة تحويل لابلاس.

1- طريقة النواة الحالة

تعتمد هذه الطريقة على استبدال النواة k بالنواة R حيث يمكن (من خلال النواة R) التعبير عن حل المعادلة التكاملية.

1- لتكن المعادلة التكاملية التالية لفولتيرا

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_o^x k(x,t)\varphi(t)dt \qquad (24)$$

حيث $k(x,t)$ تابع مستمر عندما

$$o \le x \le a \quad , \quad o \le t \le x$$

أو نفترض أن النواة

$$k(x,t) \in L^2\{[o,a] \times [o,x]\}$$

كما نفرض أن التابع $f(x)$ مستمر في المجال $[o,a]$ وأن $f(x) \in L^2[o,a]$ ونبحث الأن عن حل للمعادلة التكاملية (24) على شكل متسلسلة القوى لانهائية في λ أي من الشكل

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + \cdots + \lambda^n\varphi_n(x) + \cdots \quad (25)$$

لنعوض المتسلسلة (25) في (24) فنجد أن

$$\varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \cdots + \lambda^{\mathrm{n}}\,\varphi_n\,(x) + \cdots$$
$$= f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)[\varphi_0(t) + \lambda\varphi_1(t) + \cdots + \lambda^{\mathrm{n}}\varphi_n(x) + \cdots]$$

بإجراء المطابقة بين الحدود المتشابهة ومن نفس الدرجة λ نجد

$$\varphi_0(x) = f(x)$$
$$\varphi_1(x) = \int_0^x k(x,t)\varphi_0(t)dt = \int_0^x k(x,t)f(t)dt \qquad (26)$$
$$\varphi_2(x) = \int_0^x k(x,t)\varphi_1(t)\mathrm{dt} = \int_0^x k(x,t)\left[\int_0^t k(t,t_1)\,f\,(t_1)\mathrm{dt}_1\right]\mathrm{dt}$$

إن العلاقات (26) تعطي طريقة تتابعية لتعيين وحساب التوابع $\varphi_n\,(x)$ وتدعى هذه الطريقة لتعيين حل المعادلة التكاملية بطريقة التقريب المتتالي.

2- نبرهن بأن المتسلسلة (25) متقاربة بإنتظام بالنسبة للمتحولين x و λ وذلك من أجل أي قيمة لـ λ و $x \in [o,a]$ وأن مجموع هذه المتسلسلة هو الحل الوحيد للمعادلة التكاملية (24).

من العلاقة (26) نستنتج تعريفاً للتوابع $\varphi_n\,(x)$

$$\varphi_1(x) = \int_0^x k(x,t)\,f(t)dt$$
$$\varphi_2(x) = \int_0^{\mathrm{x}} \mathrm{k(x,t)}\left[\int_0^t \mathrm{k(t,t_1)\,f\,(t_1)dt_1}\right]\mathrm{dt} =$$
$$= \int_0^{\mathrm{x}} \mathrm{f(t_1)dt_1} \int_{\mathrm{t_1}}^x \mathrm{k(x,t)\,k(t,t_1)dt}$$
$$= \int_0^x \mathrm{k_2(x,t_1)r(t_1)dt_1}$$

حيث

$$k_2(x,t_1)=\int_{t_1}^{x}k(x,t)k(t,t_1)dt$$

بشكل عام فإن التابع $\varphi_n(x)$ يعرف بالعلاقة

$$\varphi_n(x)=\int_0^x k_n(x,t)f(t)dt \qquad (n=1,2\ldots) \qquad (27)$$

تدعى التوابع $k_n(x,t)$ بالنوى المتكررة.

يمكن البرهان بأن النوى المكررة تتعين بوساطة الدساتير التدريجية

$$k_1(x,t)=k(x,t) \qquad (28)$$

$$k_{n+1}(x,t)=\int_t^x k(x,u)k_n(u,t)du \qquad (n=1,2,\ldots.)$$

بإستخدام العلاقتين (27) و (28) فإن المتسلسلة (25) تكتب بالشكل

$$\varphi(x)=f(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\int_0^x k_n(x,t)\Gamma(t)dt$$

لنعرف التابع $R(x,t,\lambda)$ بواسطة المتسلسلة

$$R(x,t,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n k_{n+1}(x,t) \qquad (29)$$

والذي يدعى بالنواة الحالة للمعادلة التكاملية (25).

3- نبرهن بأن المتسلسلة (29) تتقارب مطلقاً وبإنتظام في حال كون النواة $k(x,t)$ مستمرة كما أن النواة الحالة $R(x,t,\lambda)$ تحقق العلاقة التابعية التالية

$$\mathrm{R}(x,t,\lambda)=\mathrm{k}(x,\mathrm{t})+\lambda\int_{\mathrm{t}}^{x}\mathrm{k}(x,\mathrm{s})\,\mathrm{R}\,(\mathrm{s},\mathrm{t},\lambda)\mathrm{ds}$$

باستخدام النواة الحالة $R(x,t,\lambda)$ يمكن كتابة حل المعادلة التكاملية (24) بالشكل

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^x R(x,t,\lambda)\,f\,(t)dt$$

2- طريقة التقريبات المتتالية:

لتكن معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني التالية

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^x K(x,t)\varphi(t)dt \qquad (30)$$

حيث $f(x)$ تابع مستمر في المجال $[o,a]$ والنواة $K(x,t)$ تابع مستمر في المجالات

$$o\le x\le a \quad , \quad o\le t\le x$$

لنعتبر $\varphi_0(x)$ تابع مستمراً في المجال $[o,a]$ بإستبدال $\varphi(x)$ بـ $\varphi_0(x)$ في الطرف الأيمن من (30) نحصل على التقريب من المرتبة الاولى

$$\varphi_1(x)=f(x)+\lambda\int_0^x K(x,t)\varphi_0(t)dt$$

التابع $\varphi_1(x)$ المعرف بالعلاقة السابقة هو أيضاً تابع مستمر في نفس المجال $[o,a]$ وبمتابعة نفس العمل نحصل على متتالية من التوابع

$$\varphi_0(x),\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_n(x),\ldots$$

حيث

$$\varphi_{\mathrm{n}}(x)=\mathrm{f}(x)+\lambda\int_0^x\mathrm{K}(x,\mathrm{t})\varphi_{\mathrm{n}-1}(\mathrm{t})\mathrm{dt}$$

هو التقريب من الرتبة n، والمتتالية $\varphi_n(x)$ تتقارب نحو الحل $\varphi(x)$ للمعادلة التكاملية (30) وذلك عندما $n = \infty$.

النتائج والتوصيات

في هذه الدراسة تم عرض بعض الطرق التحليلية لحل معادلتي فريدهولم وفولتيرا التكاملية من النوع الثاني وتم التطرق لدراسة مفاهيم المعادلات التكاملية وتصنيفها حسب النواة وتطبيق بعض الطرق التحليلية لإيجاد الحل الصحيح، واستنتجنا أن حلول المعادلات التكاملية له أهمية في العديد من التطبيقات العلمية حيث يعتمد حل المعادلات التكاملية على النواة ، وأن الطرق التحليلية أثبتت وجود ووحدانية الحل لهذه المعادلات.

نوصي بدراسة الحل العددي لمعادلتي فريدهولم وفولتيرا التكاملية من النوع الثاني باستخدام الماتلاب.

المـــراجـــع

1) H. Brunner, Theory and numerical solution of Volterra functional integral equations, Hong Kong Baptist University, (2010).

2) A. Hossein, A new analytical method for solving systems of linear integro-differential equations, Journal of King Saud University –Science, (2010).

3) A. Hossein, B. Jafar, A new analytical method for solving systems of Volterra integral equations, International Journal of Computer Mathematics, (2010).

4) K. Atkinson, The Numerical solution of Integral Equations of the second kind, the press syndicate of the University Of Cambridge, United Kingdom, (1999).

5) A. Wazwaz, A First Course in Integral Equations, World, Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., (1997).

6) S. Feda, Analytic and Numerical solution of Volterra integral equation of the Second Kind, An-Najah National University, (2014).

7) p. Linz, Analytic and Numerical methods for Volterra Equations, SIAM, Philadelphia, (1985).

8 M. Aigo, On The Numerical Approximation of Volterra Integral Equations of Second Kind Using Quadrature Rules, International Journal of Advanced Scientific and Theoretical Research Issue 3 VOL. 1, (2013).

9) W. Hackbusch, Integral Equations: Theory and Numerical Treatment, Birkhäuser Verlag. Basel, (1995).

10) معروف بسوت، معادلات تكاملية، جامعة حلب، الطبعة الثالثة، 2007م.

11) المبروك يونس، محمد الأحمر، اساسيات الجبر الخطي، دار الكتاب الجديد المتحدة، الطبعة الأولى، 2002 م.